Bazna matrica krutosti

Vidjeli smo da su **elementi matrice krutosti** konstante **koje zavise od geometrije štapa i modula elastičnosti materijala**.

Ako su **poznate** komponente **generalisanih pomjeranja q**, pomoću matrične jednačine **R=kq** mogu se jednoznačno **odrediti komponente generalisanih sila R**.

Međutim, rješenje **obrnutog zadatka nije moguće** jer je **matrica krutosti štapa k singularna**, tako da se ne može dobiti inverzna relacija $q=k^{-1}R$.

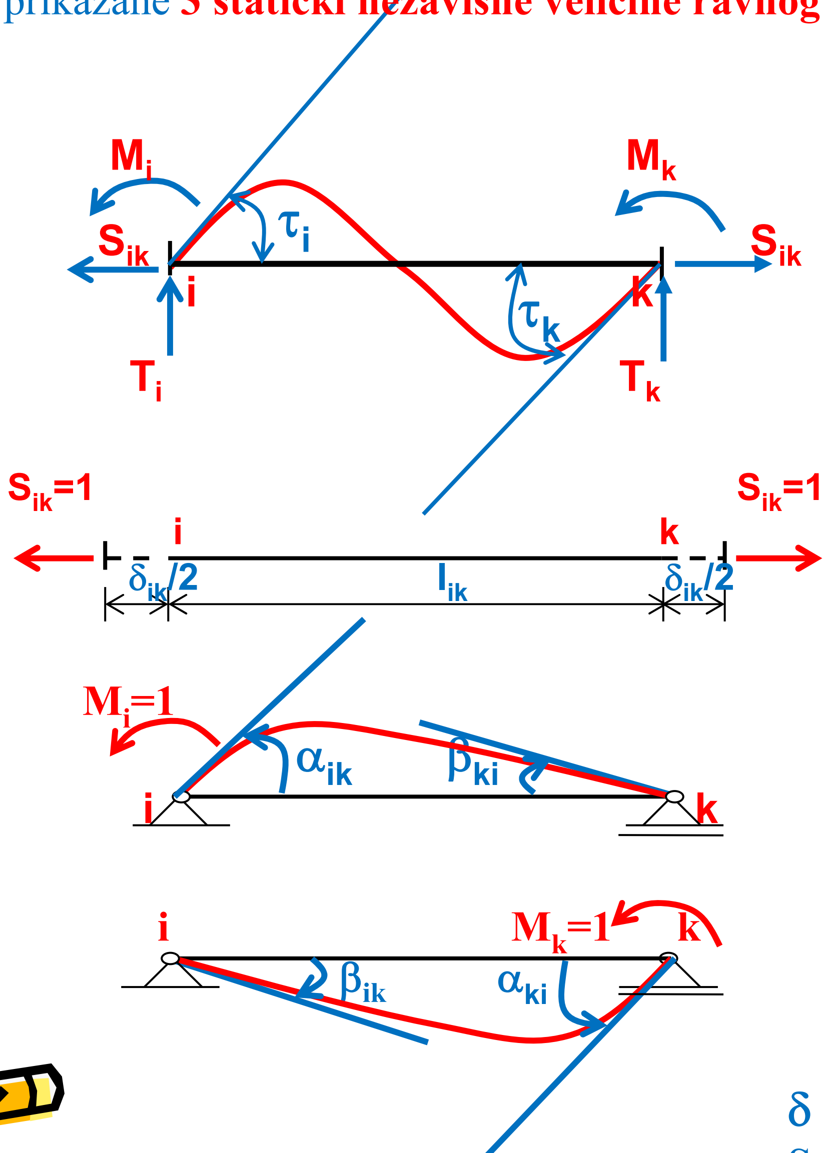
Rang matrice k manji je od njenog reda za broj stepeni slobode štapa kao krutog tijela.

Singularitet matrice krutosti je posledica okolnosti da se **u vektoru generalisanih pomjeranja**, pored pomjeranja usled deformacije, **sadržana i pomjeranja štapa kao krutog tijela**, pa generalisane sile na krajevima štapa ne mogu biti nezavisne.

Sile na krajevima štapa moraju da zadovolje **uslove ravnoteže**.

Za ravan štap **broj uslova ravnoteže je 3** pa od **šest generalisanih sila** postoje **samo tri koje su međusobno nezavisne**.

Na slici su prikazane **3 statički nezavisne veličine ravnog štapa S_{ik}, M_i i M_k**



Ovim veličinama **odgovaraju deformacijske veličine** štapa **promjena dužine štapa Δl_{ik}** i **deformacioni uglovi na krajevima** i i k, τ_i i τ_k.

Na osnovu principa superpozicije **veza između osnovnih deformacijskih veličina i osnovnih statičkih veličina** na krajevima štapa može da se prikaže u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_i \\ \tau_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{ik} & & \\ & \alpha_{ik} & -\beta_{ik} \\ & -\beta_{ki} & \alpha_{ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_i \\ M_k \end{bmatrix}$$

u skraćenom matričnom obliku

$$\delta = f\ S$$

δ - vektor osnovnih deformacijskih veličina

S – vektor osnovnih statičkih veličina

f – matrica fleksibilnosti štapa

$$\delta = f\,S \qquad\qquad S = f^{-1}\delta = k_o\,\delta$$

k_o - osnovna ili bazna matrica krutosti štapa

$$k_o = \begin{bmatrix} k_{11}^o & & \\ & k_{22}^o & k_{23}^o \\ & k_{32}^o & k_{33}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\delta_{ik}} & & \\ & a_{ik} & b_{ik} \\ & b_{ki} & a_{ki} \end{bmatrix}$$

gdje su: $a_{ik} = \dfrac{\alpha_{ki}}{\Delta} \qquad a_{ik} = \dfrac{\alpha_{ik}}{\Delta} \qquad b_{ik} = \dfrac{\beta_{ik}}{\Delta} = \dfrac{\beta_{ki}}{\Delta} \qquad \Delta = \alpha_{ik}\alpha_{ki} - \beta_{ik}^2$

Bazna matrica krutosti je simetrična: $\beta_{ik} = \beta_{ki}$

Za štap konstantnog poprečnog presjeka **EI=const** slijedi:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} = \frac{l}{3EI} \qquad \beta_{ik} = \beta_{ki} = \frac{l}{6EI}$$

$$\delta_{ik} = \frac{l}{EF} \qquad \Delta = \frac{l^2}{12(EI)^2}$$

Bazna matrica krutosti za štap konstantnog poprečnog presjeka:

$$k_o = \begin{bmatrix} \dfrac{EF}{l} & & \\ & \dfrac{4EI}{l} & \dfrac{2EI}{l} \\ & \dfrac{2EI}{l} & \dfrac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

Određivanje matrice krutosti štapa i-k pomoću bazne matrice

Potrebno je uspostaviti vezu između

osnovnih deformacijskih veličina i parametara pomjeranja štapa,

kao i veza između

generalisanih sila i osnovnih statičkih veličina štapa.

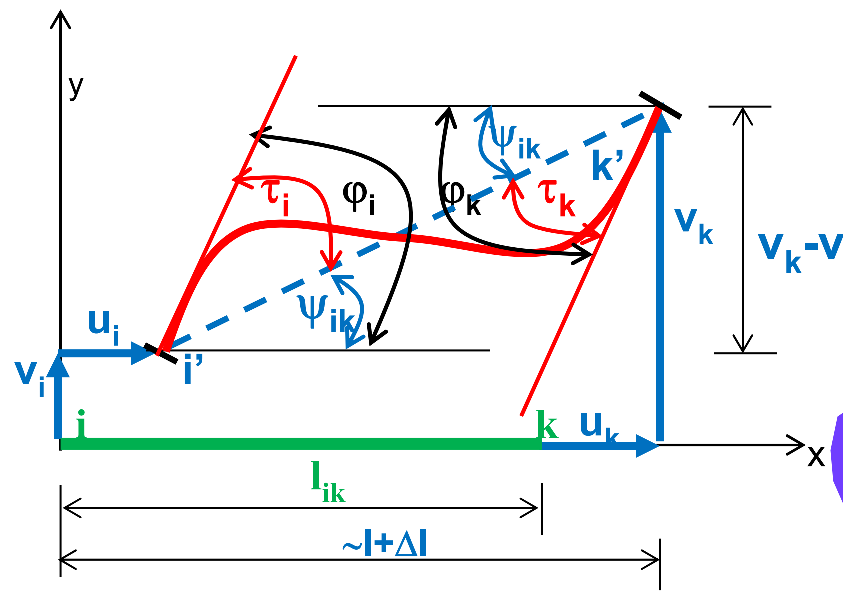
Razmatra se štap i-k prije i posle deformacije.

Postoje **očigledne zavisnosti** između **osnovnih deformacijskih veličina i parametara pomjeranja**:

$$\Delta l = u_k - u_i$$

$$\tau_i = \varphi_i - \psi_{ik} = \varphi_i - \frac{1}{l}(v_k - v_i) = \varphi_i - \frac{1}{l}v_k + \frac{1}{l}v_i$$

$$\tau_k = \varphi_k - \psi_{ik} = \varphi_k - \frac{1}{l}(v_k - v_i) = \varphi_k - \frac{1}{l}v_k + \frac{1}{l}v_i$$

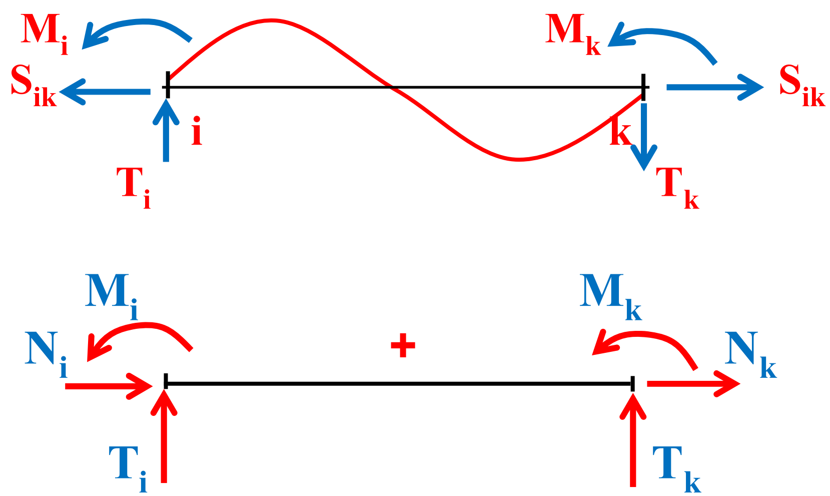


$$\begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_i \\ \tau_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 1 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_k \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix}$$

$$\delta = C\,q$$

$$C=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 1 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix}$$

Veze između **generalisanih sila i osnovnih statičkih veličina**:



Iz uslova ravnoteže štapa

$$T_i=-T_k=\frac{1}{l}(M_i+M_k)$$

$$\begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_i \\ M_k \end{bmatrix}$$

U skraćenom matričnom obliku

$$R=C^T S$$

$$R = C^T S \qquad\qquad R = C^T k_o \delta = C^T k_o C q$$

$$R = kq$$

$$k = C^T k_o C$$

k - matrica krutosti štapa dobijena pomoću **bazne matrice krutosti i matrice C** koja predstavlja vezu deformacijskih veličina i generalisanih pomjeranja.

$$k = C^T k_o C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{ik}} & & \\ & a_{ik} & b_{ik} \\ & b_{ki} & a_{ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 1 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{ik}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta_{ik}} & 0 & 0 \\ & \frac{c_{ik}+c_{ki}}{l^2} & \frac{c_{ik}}{l} & 0 & -\frac{c_{ik}+c_{ki}}{l^2} & \frac{c_{ki}}{l} \\ & & a_{ik} & 0 & -\frac{c_{ik}}{l} & b_{ik} \\ & sim. & & \frac{1}{\delta_{ik}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{c_{ik}+c_{ki}}{l^2} & -\frac{c_{ki}}{l} \\ & & & & & a_{ki} \end{bmatrix}$$

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$$

$$c_{ki} = a_{ki} + b_{ik}$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{ik}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta_{ik}} & 0 & 0 \\ & \frac{c_{ik}+c_{ki}}{l^2} & \frac{c_{ik}}{l} & 0 & -\frac{c_{ik}+c_{ki}}{l^2} & \frac{c_{ki}}{l} \\ & & a_{ik} & 0 & -\frac{c_{ik}}{l} & b_{ik} \\ & sim. & & \frac{1}{\delta_{ik}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{c_{ik}+c_{ki}}{l^2} & -\frac{c_{ki}}{l} \\ & & & & & a_{ki} \end{bmatrix}$$

EI=const

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

Određivanje matrice krutosti štapa promjenljivog poprečnog presjeka

Definisana je matrica krutosti ravnog štapa promjenljivog poprečnog presjeka

U opštem slučaju kada se radi **o štapu promjenljivog poprečnog presjeka** koeficijenti fleksibilnosti δ_{ik}, α_{ik}, α_{ki}, β_{ik} **određuju se numeričkim putem** zbog toga što integracija u zatvorenom obliku može biti komplikovana.

$$\alpha_{ik} = \int_i^k \frac{M_{ik}^2}{EI} ds \qquad \alpha_{ki} = \int_i^k \frac{M_{ki}^2}{EI} ds \qquad \beta_{ik} = \int_i^k \frac{M_{ik} M_{ki}}{EI} ds$$

Za numeričko određivanje integrala oblika:

$$\int \frac{M_i M_k}{EI(x)} dx = \int f(x) dx$$

Trapezno pravilo:

$$\int f(x) dx = \frac{\lambda}{2} (f_1 + 2 f_2 + \ldots + 2 f_{n-1} + f_n)$$

Simpsonovo pravilo, za paran broj podjela:

$$\int f(x) dx = \frac{\lambda}{3} (f_1 + 4 f_2 + 2 f_3 + \ldots + 2 f_{n-2} + 4 f_{n-1} + f_n)$$

f_i (i=1,2,...,n) vrijednosti podintegralne funkcije f(x) u izabranim tačkama i=1,2,...,n

λ – rastojanje između usvojenih tačaka

Određivanje matrice krutosti štapa i-g

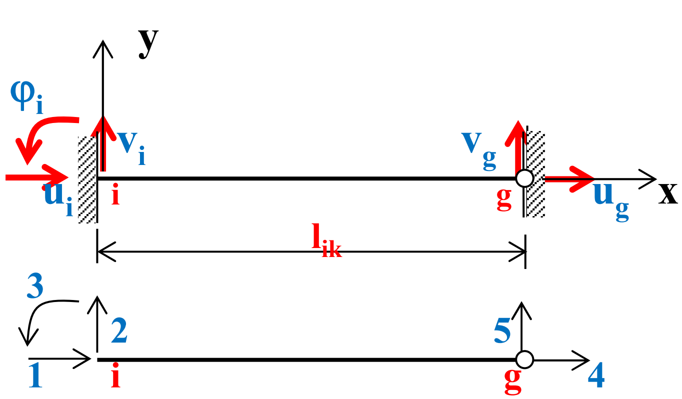
Prethodna razmatranja data su za štap koji je **obostrano kruto vezan**.

U **čvorovima** takvog štapa definisana su **po tri stepena slobode i po tri generalisane sile**.

Štap u jednom od čvorova može **biti zglavkasto vezan** pa je **moment savijanja u tom čvoru jednak nuli.**

Pošto se **iz tog uslova može eliminisati obrtanje u zglavkastom čvoru broj stepeni slobode se smanjuje za jedan.**

Štap koji je **na lijevom kraju kruto vezan a na desnom kraju zglavkasto vezan** ima **pet stepeni slobode, tri u čvoru i, i dva u čvoru g**:



$$\begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_i \\ M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^o & & \\ & k_{22}^o & k_{23}^o \\ & k_{32}^o & k_{33}^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta l \\ \tau_i \\ \tau_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{ik}} & & \\ & a_{ik} & b_{ik} \\ & b_{ki} & a_{ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta l \\ \tau_i \\ \tau_k \end{bmatrix}$$

i smjenom oznake k=g, uz uslov da je **M_k=M_g=0** dobija se:

$$\tau_g = -\frac{k_{32}^o}{k_{33}^o}\tau_i = -\frac{b_{ig}}{a_{gi}}\tau_i$$

$$\begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{ik}} & & \\ & a_{ig} & b_{ig} \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta l \\ \tau_i \\ -\frac{b_{ig}}{a_{gi}}\tau_i \end{bmatrix} \qquad M_i = a_{ig}\tau_i - \frac{b_{ig}^{\ 2}}{a_{gi}}\tau_i$$

Smjenom izraza dobija se:

$$d_{ig} = a_{ig} - \frac{b_{ig}^{\ 2}}{a_{gi}} \qquad \begin{bmatrix} S_{ig} \\ M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{ig}} & \\ & d_{ig} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta l \\ \tau_i \end{bmatrix}$$

u skraćenom matričnom obliku:

$$S = k_{go}\delta \qquad k_{go} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{ig}} & \\ & d_{ig} \end{bmatrix}$$

$$k_g = C_g^{\ T} k_{go} C_g$$

Broj osnovnih statičkih, odnosno,deformacijskih veličina redukuje sa tri na dva pa redukovana matrice C ima sljedeći oblik:

$$C_g = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 1 & 0 & -\frac{1}{l} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 1 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix}$$

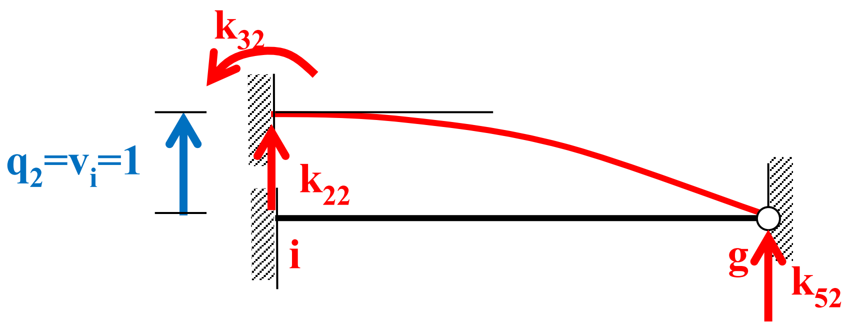
Na sličan način se dobija i transponovana matrica $\mathbf{C_g}^{\mathbf{T}}$

$$k_g = C_g^T k_{go} C_g = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{ig}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta_{ig}} & 0 \\ & \frac{d_{ig}}{l^2} & \frac{d_{ig}}{l} & 0 & -\frac{d_{ig}}{l^2} \\ & & d_{ig} & 0 & -\frac{d_{ig}}{l} \\ & sim. & & \frac{1}{\delta_{ig}} & 0 \\ & & & & \frac{d_{ig}}{l^2} \end{bmatrix}$$

EI=const

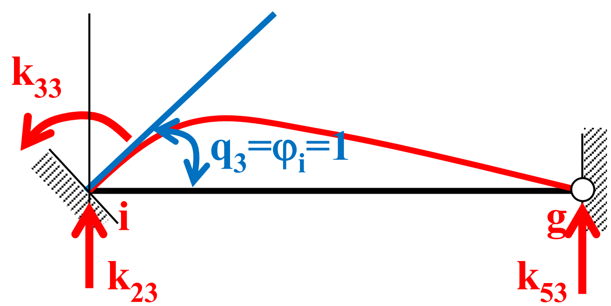
$$k_g = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 \\ & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ & & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \\ & sim. & & \frac{EF}{l} & 0 \\ & & & & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix}$$

Statičko-kinematičko značenje pojedinih elemenata **matrice krutosti štapa i-g** dato je na slici:



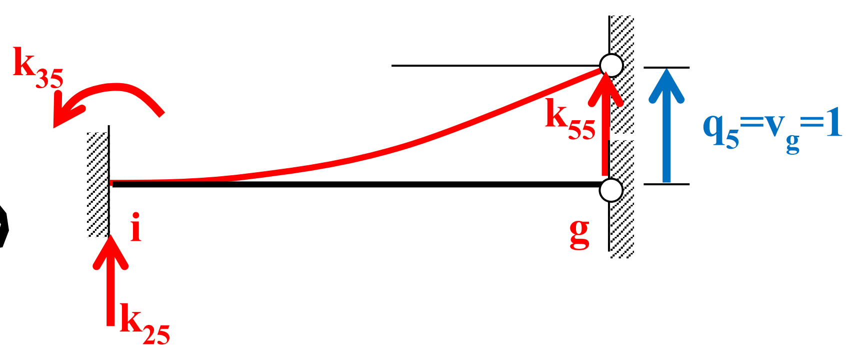
$q_2=v_i=1$

elementi druge kolone matrice krutosti



$q_3=\varphi_i=1$

elementi treće kolone matrice krutosti



$q_5=v_g=1$

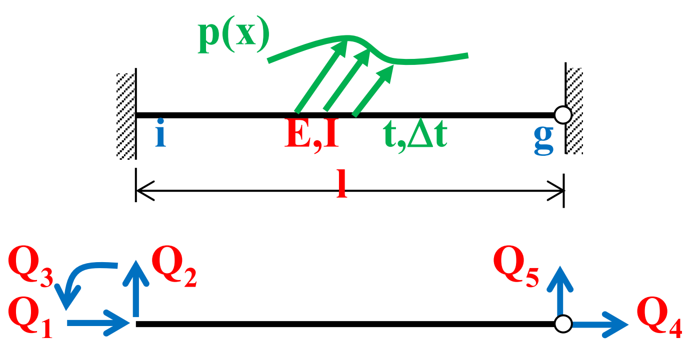
elementi pete kolone matrice krutosti

Vektor ekvivalentnog opterećenja

Postupak određivanja vektora ekvivalentnog opterećenja je sličan postupku kod štapova koji su obostrano ktuto vezani.

Komponente Q_1 i Q_4 odgovaraju aksijalnom naprezanju.

Određivanje komponenti Q_2, Q_3 i Q_5 predstavlja **jedan put statički neodređen zadatak** koji može da se riješi poznatim metodama statike konstrukcija.



U opštem slučaju **vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja** ima sljedeći oblik:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mathcal{N}_i \\ \mathcal{T}_i \\ \mathcal{M}_i \\ \mathcal{N}_k \\ \mathcal{T}_k \end{Bmatrix}_0 - \begin{Bmatrix} \mathcal{N}_i \\ \mathcal{T}_i \\ \mathcal{M}_i \\ \mathcal{N}_k \\ \mathcal{T}_k \end{Bmatrix}_t$$

Gdje su **Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 i Q_5 reakcije na krajevima štapa tipa „g“** koji je na lijevom kraju kruto uklješten a na desnom kraju slobodno oslonjen usled zadatog opterećenja.

U literaturi se mogu naći **tabele u kojima su prikazana ekvivalentna opterećenja za različite slučajeve dejstva spoljašnjih uticaja**.

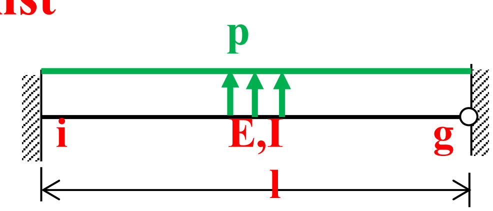
Za aksijalno naprezanje vektor ekvivalentnog opterećenja

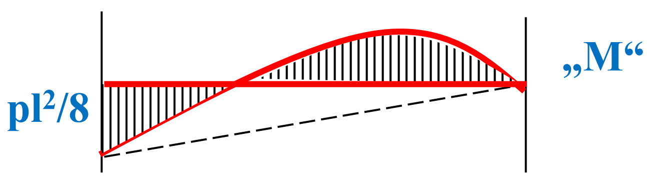
$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mathcal{N}_i \\ \mathcal{N}_k \end{Bmatrix}_0 - \begin{Bmatrix} \mathcal{N}_i \\ \mathcal{N}_k \end{Bmatrix}_t$$

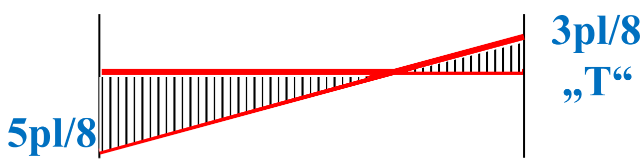
Za savijanje u ravni vektor ekvivalentnog opterećenja

$$\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_5 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mathcal{T}_i \\ \mathcal{M}_i \\ \mathcal{T}_k \end{Bmatrix}_0 - \begin{Bmatrix} \mathcal{T}_i \\ \mathcal{M}_i \\ \mathcal{T}_k \end{Bmatrix}_{\Delta t}$$

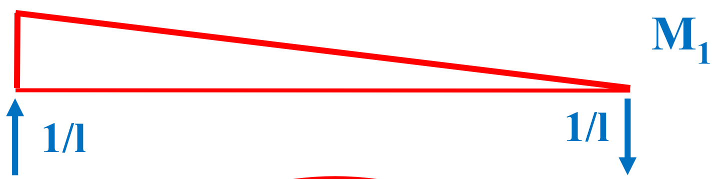
p=const

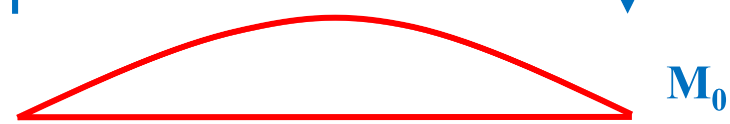






Dijagrami u osnovnom sistemu:





$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0$$

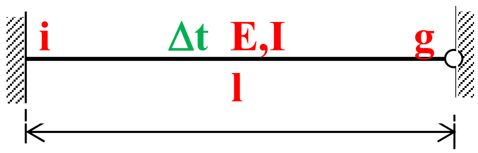
$$EI\delta_{11} = \int_0^l M^2{}_1 dx = \frac{l}{3}$$

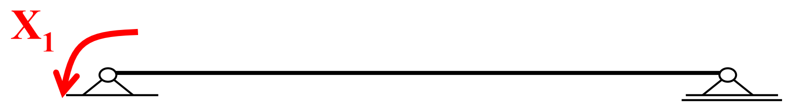
$$EI\delta_{1o} = \int_0^l M_1 M_o dx = \frac{p_o l^3}{24}$$

$$X_1 = \frac{1}{8}pl^2$$

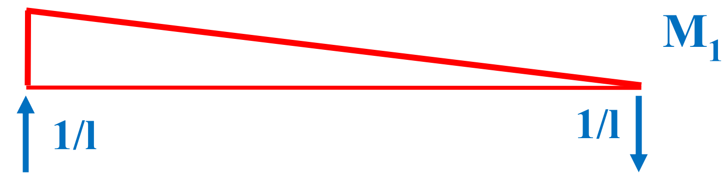
$$Q_o = \begin{Bmatrix} \frac{5}{8}pl \\ \frac{1}{8}pl^2 \\ \frac{3}{8}pl \end{Bmatrix}$$

Δt=const





Dijagrami u osnovnom sistemu:



$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1t} = 0$$

$$EI\delta_{11} = \int_0^l M^2{}_1 dx = \frac{l}{3}$$

$$\delta_{it} = \int_0^l M_i \alpha_t \frac{\Delta t}{h} dx$$

$$EI\delta_{1t} = EI\alpha_t \frac{\Delta t l}{2h}$$

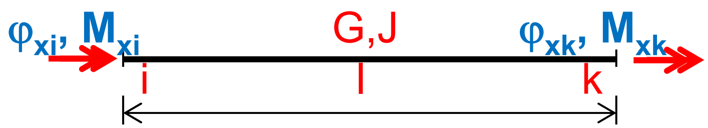
$$X_1 = 1{,}5EI\alpha_t \Delta t \frac{1}{h}$$

$$Q_{\Delta t} = 1{,}5EI\alpha_t \Delta t \frac{1}{h}\begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} \\ -1 \\ \frac{1}{l} \end{Bmatrix}$$

Torzija - matrica krutosti

Štap koji se nalazi **u stanju torzionog naprezanja** ima parametre pomjeranja u čvorovima koji su **uglovi rotacije oko ose x, φ_{xi} i φ_{xk}**, tako da **štap ima dva stepena slobode**, **po jedan u svakom čvoru**.

Generalisane sile u **čvorovima su M_{xi} i M_{xk}**.

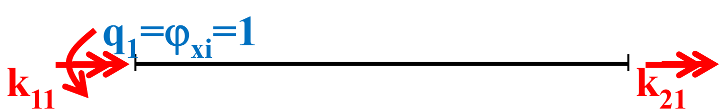


Veza **između momenata torzije i ugla obrtanja** štapa izloženog slobodnoj torziji :

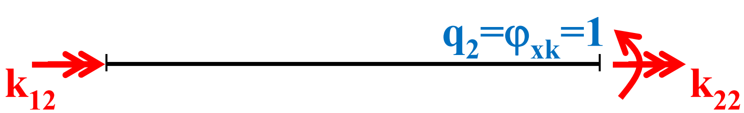
$$M_x = \frac{GJ}{l}\varphi_x$$

G - modul klizanja **J** – torziona konstanta poprečnog presjeka

DIREKNA METODA- Matrica krutosti je drugog reda, a značenje elemenata te matrice je dato na slikama:



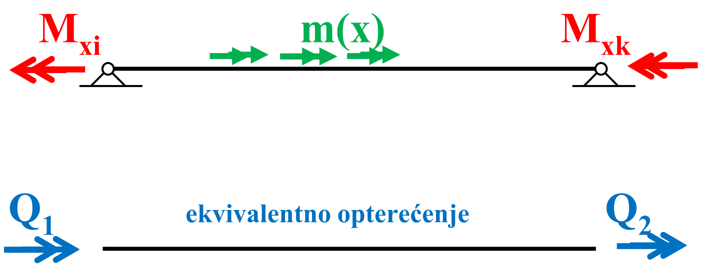
$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{xk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{l} \\ -\frac{GJ}{l} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{xk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{GJ}{l} \\ \frac{GJ}{l} \end{bmatrix}$$



$$k_t = \frac{GJ}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dobijena **matrica krutosti za štap u stanju torzionog naprezanja** je **ekvivalentna matrici krutosti aksijalno napregnutog štapa.**

Vektor ekvivalentnog opterećenja:



$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{xk} \end{bmatrix}$$

Uticaj deformacije smicanja

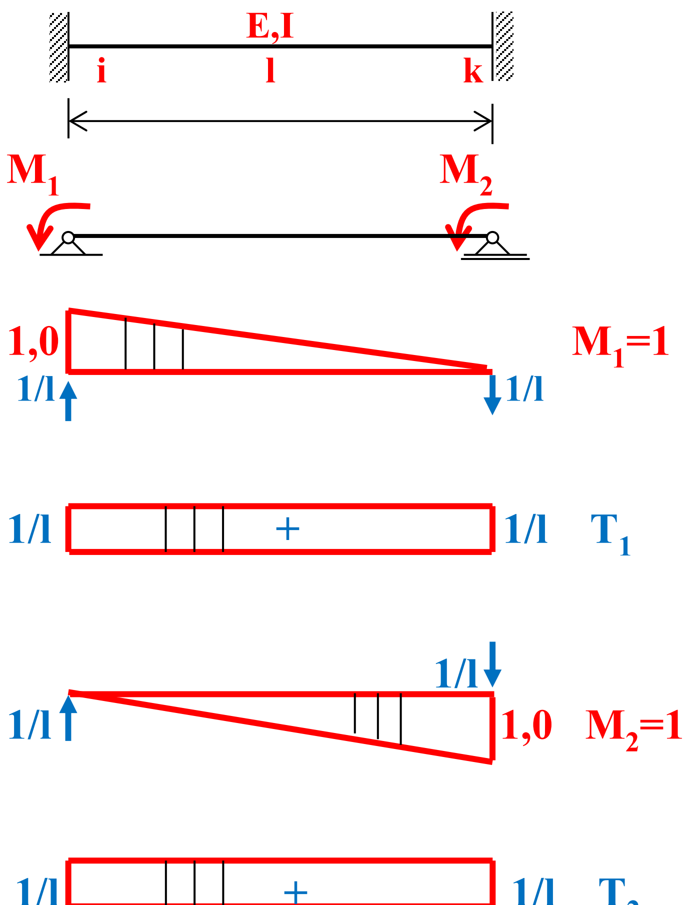
Prethodna razmatranja zasnovana su na **pretpostavci da poprečni presjeci ostaju upravni na deformisanu osu štapa**, odnosno, u analizi naponsko-deformacijskog stanja **zanemaren je uticaj deformacije smicanja**.

Kod tankih prizmatičnih štapova taj uticaj je neznatan i može se zanemariti, dok se kod štapova kod kojih je **odnos visine i dužine znatan**, o **deformaciji smicanja mora voditi računa**.

Najjednostavniji postupak **uvođenja deformacije smicanja u matricu krutosti** je **preko bazne matrice krutosti štapa**.

Koristeći se **pretpostavkom o prosječnom klizanju za cio poprečni presjek**, presjeci ostaju ravni ali ne i upravni na deformisanu osu štapa, **koeficijenti fleksibilnosti se određuju na sljedeći način**:

Dijagrami momenata savijanja M i transverzalnih sila T usled dejstva jediničnih momenata na krajevima štapa.



$$k_o = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{ik}} & & \\ & a_{ik} & b_{ik} \\ & b_{ki} & a_{ki} \end{bmatrix}$$

$$\delta_{ik} = \int_0^l \frac{M_i M_k}{EI_{ik}} dx + \int_0^l k \frac{T_i T_k}{GF} dx$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \alpha_{ik} = \alpha_{ki} = \frac{l}{3EI} + \frac{k}{GFl}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \beta_{ik} = -\frac{l}{6EI} + \frac{k}{GFl}$$

Ako se navedeni izrazi ubace u:

$$a_{ik} = \frac{\alpha_{ki}}{\Delta} \qquad a_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{\Delta}$$

$$b_{ik} = \frac{\beta_{ik}}{\Delta} = \frac{\beta_{ki}}{\Delta} \qquad \Delta = \alpha_{ik}\alpha_{ki} - \beta_{ik}^2$$

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$$

$$k_o = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\delta_{ik}} & 0 & 0 \\ 0 & a_{ik} & b_{ik} \\ 0 & b_{ki} & a_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{(1+0{,}25\Phi)}{(1+\Phi)}\dfrac{4EI}{l} & \dfrac{(1-0{,}5\Phi)}{(1+\Phi)}\dfrac{2EI}{l} \\ 0 & \dfrac{(1-0{,}5\Phi)}{(1+\Phi)}\dfrac{2EI}{l} & \dfrac{(1+0{,}25\Phi)}{(1+\Phi)}\dfrac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \frac{12EIk}{GFl^2}$$

Alternativni oblik bazne matrice krutosti je

$$k_o = \begin{bmatrix} \dfrac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{12EI}{(1+\Phi)l^3} & -\dfrac{6EI}{(1+\Phi)l^2} \\ 0 & -\dfrac{6EI}{(1+\Phi)l^2} & \dfrac{12EI}{(1+\Phi)l^3} \end{bmatrix}$$

$$k = C^T k_o C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\Phi)l^3} & -\frac{6EI}{(1+\Phi)l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{(1+\Phi)l^2} & \frac{12EI}{(1+\Phi)l^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 1 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta_{ik}} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{(1+\Phi)l^3} & \frac{6EI}{(1+\Phi)l^2} & 0 & -\frac{12EI}{(1+\Phi)l^3} & \frac{6EI}{(1+\Phi)l^2} \\ & & \frac{(1+0{,}25\Phi)4EI}{(1+\Phi)l} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\Phi)l^2} & 1-0{,}5\Phi \\ & sim. & & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{(1+\Phi)l^3} & -\frac{6EI}{(1+\Phi)l^2} \\ & & & & & \frac{(1+0{,}25\Phi)4EI}{(1+\Phi)l} \end{bmatrix}$$

Udio deformacije smicanja u matrici krutosti **definisan je parametrom Φ.**

Za štapove pravougaonog poprečnog presjeka visine h, dužine l, Φ postaje:

$$\Phi = k\frac{E}{G}\left(\frac{h}{l}\right)^2$$

Za građevinske materijale vrijednost puasonovog koeficijenta ν kreće se u **granicama ν=0 - 0,25**.

Ako je **koeficijent oblika za pravougaoni poprečni presjek k=1,2** u zavisnosti od odnosa h/l dobija se vrijednost **Φ**:

$$\Phi = k\frac{E}{G}\left(\frac{h}{l}\right)^2$$

h/l	Φ
0,1	0,024
0,2	0,036
0,3	0,216
0,4	0,384

Za štap tipa „g“ konstantnog poprečnog presjeka koji je na jednom kraju zglavkasto vezan dobija se:

$$k_{22}^{o} = \frac{1}{1+0{,}25\Phi}\frac{3EI}{l}$$

Matrica krutosti štapa i-g je:

$$k_g = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 \\ & \frac{1}{1+0{,}25\Phi}\frac{3EI}{l^3} & \frac{1}{1+0{,}25\Phi}\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{1}{1+0{,}25\Phi}\frac{3EI}{l^3} \\ & & \frac{1}{1+0{,}25\Phi}\frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{1}{1+0{,}25\Phi}\frac{3EI}{l^2} \\ & sim. & & \frac{EF}{l} & 0 \\ & & & & \frac{1}{1+0{,}25\Phi}\frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix}$$